

Gruppenübung 10

Aufgabe 1 Wir betrachten ein allgemeines lineares zeit-invariantes System, d.h. ein System gegeben durch

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, und $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$.

- Angenommen das lineare System hat einen relativen Grad $r \in \mathbb{N}_0$. Charakterisieren sie den differentiellen relativen Grad r_d durch algebraische Bedingungen in Abhängigkeit von A, B, C, D (d.h. berechnen Sie die Lieableitungen $L_f^k h$ für $k = 0, \dots, r-1$ und wenden Sie die Definition für den relativen Grad an).
- Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem differentiellen relativen Grades eines linearen Systems und dem relativen Grad als Differenz zwischen dem Nennergrad und dem Zählergrad der zugehörigen Übertragungsfunktion.
- Zeigen Sie, dass der relative Grad invariant gegenüber Koordinatentransformationen ist (d.h. führen Sie neue Koordinaten z mit $x = Tz$, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det T \neq 0$ ein und betrachten Sie das System in den Koordinaten z).

Aufgabe 2 Bestimmen Sie für die folgenden Systeme den relativen Grad. Geben Sie an, ob dieser wohldefiniert ist.

a)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{(s+1)(s^2-2s+1)},$$

wobei $u(t) \bullet \longrightarrow U(s)$ und $y(t) \bullet \longrightarrow Y(s)$.

b)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2^2 + x_1^2 u$$

$$y = x_1.$$

c)

$$\dot{x}_1 = x_3(1 + x_1^2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$\dot{x}_3 = 1 - x_1^3 + u$$

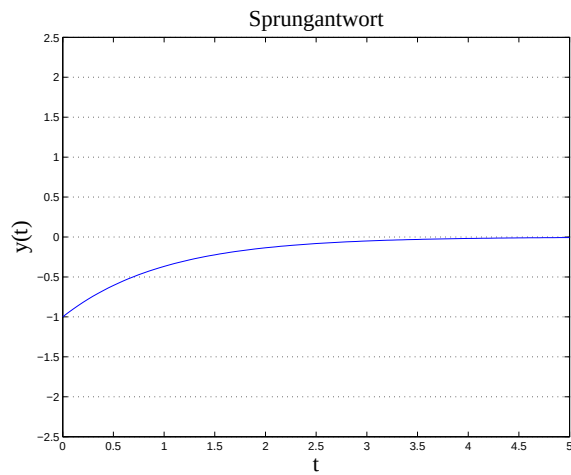
$$y = x_2.$$

Aufgabe 3 In Abbildungen 3 sind die Sprungantworten für vier Systeme dargestellt. Bestimmen Sie jeweils den relativen Grad.

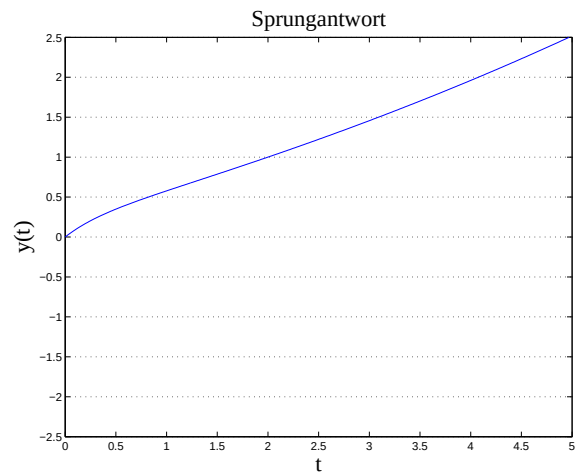
Aufgabe 4 Gegeben sei das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2^2 \\ x_2^3 - x_1 x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

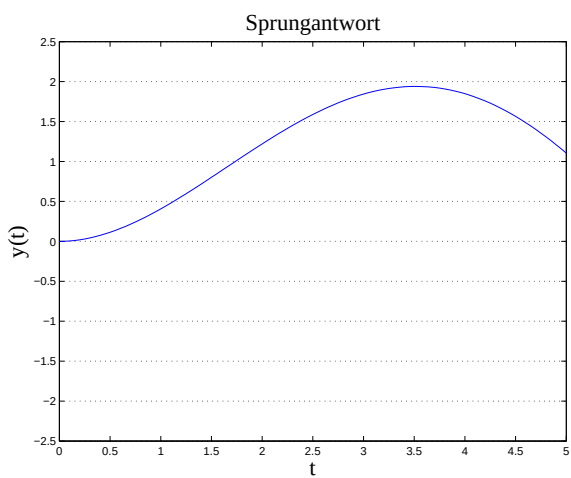
$$y = x_3.$$



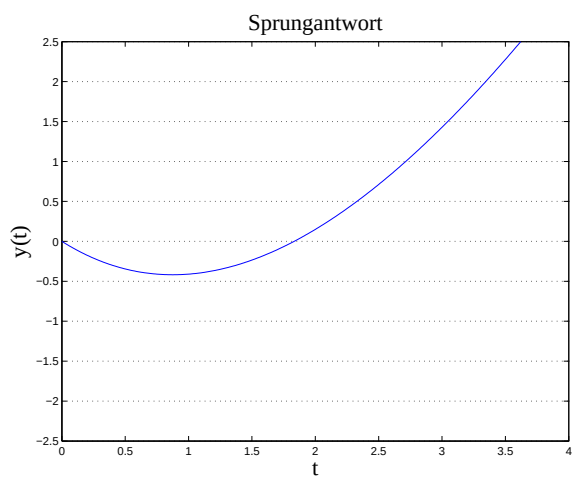
(a) Sprungantwort



(b) Sprungantwort



(c) Sprungantwort



(d) Sprungantwort

Abbildung 1: Sprungantworten von vier Systemen

- Bestimmen Sie den relativen Grad des Systems.
- Bestimmen Sie die Koordinatentransformation Φ die das System auf Byrnes-Isidori-Normalform transformiert.
- Ist die Transformation ein globaler Diffeomorphismus?
- Schreiben Sie das System in z -Koordinaten. Geben Sie an ob das transformierte System eingangsnormalisiert ist.
- Finden Sie eine Transformation so dass das transformierte System eingangsnormalisiert ist.